Université Paul Sabatier de Toulouse, année universitaire 2005-2006

CIMP, PHYSIQUE, ÉPREUVE 2 de Contrôle continu, décembre 2005

A. Questions de cours (5 points)

Théorème de l'énergie pour un point matériel

i) **(1 pt)** La variation d'énergie cinétique est égale au travail de toutes les forces qui s'exercent sur le point considéré :

$$\Delta\mathcal{E}_k = W \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_k = \frac{mv^2}{2}$$

ii) **(1,5 pt)** Dans le théorème de l'énergie mécanique, on sépare les forces conservatives (qui dérivent d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$) de celles qui ne sont pas conservatives. On a alors :

$$\Delta\mathcal{E}_m = W^{(nc)} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}^{(nc)} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p$$

iii) a) **(1 pt** L'énergie mécanique se conserve si $W^{(nc)} = 0$, puisque :

$$\Delta\mathcal{E}_m = 0 \quad \text{et donc} \quad \mathcal{E}_m = \text{Cte}$$

(1,5 pt) Exemple du pendule élastique. On a, si x désigne l'allongement du ressort :

$$\mathcal{E}_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} \qquad \mathcal{E}_p = \frac{Kx^2}{2} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_m = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}$$

Si la force de frottement est de la forme $-\alpha\dot{x}$, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}^{(nc)} = -\alpha\dot{x}^2$$

ce qui donne :

$$m\ddot{x}\dot{x} + Kx\dot{x} = -\alpha\dot{x}^2 \quad \text{d'où} \quad m\ddot{x} + Kx = -\alpha\dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On retrouve par l'énergie l'équation canonique d'un oscillateur amorti.

B. Problème (15 points)

Filtre mécanique résonnant

1.a) **(2,5 pt)** La loi fondamentale de la dynamique appliquée à A donne :

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - K(x - x_{O'} - l_0)\,\mathbf{e}_x - \alpha\dot{x}\,\mathbf{e}_x + \mathbf{R}$$

b) **(2 pt)** a) En projection selon l'axe horizontal, on obient :

$$m\ddot{x} = -K(x - x_{O'} - l_0) - \alpha\dot{x} \quad \text{d'où} \quad m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + K(x - l_0) = Kd_m\cos(\omega t + \phi_e)$$

ce qui s'écrit, en introduisant l'allongement $X = x - l_0$:

$$\ddot{X} + \frac{\dot{X}}{\tau_e} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 d_m \cos(\omega t + \phi_e)$$

si on pose :

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{\alpha}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{K}{m} \quad \text{et} \quad a_m = \omega_0^2 d_m$$

c) **(1,5 pt)** Les valeurs de ω_0, f_0 et τ_e sont, en précisant les unités SI :

$$\omega_0 = \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{500}{0,5}\right)^{1/2} = 31,6\,\mathrm{rad.s^{-1}} \quad \text{d'où} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 5\,\mathrm{Hz} \quad \text{et} \quad \tau_e = \frac{m}{\alpha} = 1,25\,\mathrm{s}$$

2. (1 pt) a) L'équation différentielle à laquelle satisfait le circuit est bien connue (cf. cours) :

$$e(t) = u_L + u_R + u_C = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C \quad \text{avec} \quad i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad q = Cu$$

Il en résulte :

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = e_m \cos(\omega t + \phi_e)$$

b) **(1 pt)** Si on pose :

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{R}{L} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad b_m = \frac{e_m}{L}$$

alors, l'équation s'écrit :

$$\ddot{q} + \frac{\dot{q}}{\tau_e} + \omega_0^2 q = b_m \cos(\omega t + \phi_e)$$

c) **(1 pt)** À une grandeur qui varie sinusoïdalement, $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi_x)$, on associe la fonction complexe :

$$\underline{x}(t) = x_m \exp[j(\omega t + \phi_x)] = \underline{x}_m \exp(j\omega t)$$

L'amplitude complexe $\underline{x}_m$ est le coefficient de $\exp j(\omega t)$, soit $\underline{x}_m = x_m \exp j\phi_x$. Son intérêt est d'ordre technique : on peut simplifier aisément par le terme de dépendance temporelle.

d) **(1 pt)** L'impédance électrique complexe Z du circuit RLC, en régime sinusoïdal, a pour expression :

$$Z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

Ce concept n'a de sens qu'en régime sinusoïdal. En régime non sinusoïdal, on doit associer une impédance à chaque composante sinusoïdale.

e) **(2 pt)** La fonction de transfert du système électrique a pour expression :

$$H = \underline{u}_s/\underline{u}_e = \frac{R\underline{i}}{Z\underline{i}} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{R + jL\omega - j/(C\omega)} = \frac{1}{1 + jL\omega/R - j/(RC\omega)}$$

soit, en fonction de la fréquence réduite ν :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{1 + jQ(\nu - 1/\nu)} \quad \text{où} \quad Q = \omega_0 \tau_e = \frac{L\omega_0}{R}$$

3.) (1 pt) a) La comparaison des deux équations différentielles conduit à l'analogie suivante des grandeurs mécaniques $\{X, \alpha, m, K, \dot{X}\}$ et des grandeurs électriques $\{q, R, L, 1/C, i\}$, respectivement.

b) **(2 pt)** Par analogie, l'impédance Z_m de l'oscillateur mécanique considéré (Fig. 1) a pour expression :

$$Z_m = \alpha + j\left(m\omega - \frac{K}{\omega}\right)$$

Par analogie aussi, le fonction de transfert du système mécanique considéré est :

$$\mathcal{H}(\nu) = \frac{1}{1 + j\omega_0\tau_e\nu - j\omega_0\tau_e/\nu} = \frac{1}{1 + jQ(\nu - 1/\nu)} \quad \text{avec} \quad Q = \omega_0\tau_e = \frac{m\omega_0}{\alpha} = 39,5$$

c) **(2 pt)** Les échelles sont logarithmiques : celle en abscisse pour embrasser un large domaine spectral, celle en ordonnée car la sensation auditive des sons est proportionnelle au logarithme du facteur d'amplification. Le gain $G_u(\text{dB}) = 20\lg|\mathcal{H}|$ vaut pour les valeurs extrêmes du logarithme $\mathcal{N}$ de la fréquence réduite ν :

$$G_u = 20\lg\left[\frac{1}{1 + Q^2(\nu - 1/\nu)^2}\right]^{1/2} = -10\lg\left[1 + Q^2(\nu - 1/\nu)^2\right] \approx \pm 20\mathcal{N}$$

selon que $\mathcal{N}$ est négatif ou positif, respectivement. Pour $\mathcal{N} = 0$, $G_u = 0$, ce qui correspond à la valeur maximale. Le système se comporte donc comme un filtre mécanique passe-bande.

(3 pt) Sur la figure S1 on a tracé l'allure du diagramme de Bode relatif au gain. Les asymptotes sont des droites d'équations $G_u = -20\lg Q \pm 20\mathcal{N}$ qui concourent au point de coordonnées $(0, -31,9\ \text{dB})$.

Fig. S1